Université Sidi Mohammed Ben abdellah **Année universitaire 2018-2019**
Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
Fès

Epreuve d'Analyse 4
CP 2
(Durée : 2 H)

N.B. : Aucun document n'est autorisé.

Exercice 0.1 *(4 pts)* *Soit g la fonction périodique de période 2π définie par $g(x) = 2x$ sur $]-\pi;\pi]$.*

1. *Calculer les coefficients de la série de Fourier associée à la fonction g.*
2. *Montrer que :* $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) = \frac{x}{2}$ *pour tout* $x \in]-\pi;\pi[$.
3. *En déduire la valeur de la somme* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, *ainsi que celle de* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 0.2 *(3,5 pts)*

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{at}\mathcal{H}(t)$, où $a \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{H}(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases}$

1. *Montrer que la transformée de Laplace de la fonction f est $\mathfrak{L}(f(t))(p) = \frac{1}{p-a}$ pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $Re(p) > a$.*
2. *On considère l'équation différentielle suivante :*
   (E) : $y"(t) + 5y'(t) + 4y(t) = e^{-2t}\mathcal{H}(t)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
   2-1. *Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que* $\frac{p^2+7p+11}{(p+1)(p+2)(p+4)} = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+2} + \frac{c}{p+4}$
   2-2. *En utilisant la Transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle (E).*

Exercice 0.3 *(6 pts)*
On considère la fonction de la variable complexe définie par $g(z) = e^{iz}$.

1. **1-1.** *En posant $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, écrire $g(z)$ sous forme $g(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ où P et Q sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.*
   1-2. *Montrer que gest holomorphe sur $\mathbb{C}$ (en utilisant les C.C.R), puis donner la fonction dérivée $g'(z)$ en fonction de x et y.*
2. *On considère la fonction f définie par $h(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$.*
   Pour $R > 0$, on considère Γ_R le circuit constitué par :
   $\mathcal{C}_R^+$: le demi cercle supériieur de centre 0 et de rayon R et S_R le segment $[-R, R]$.
   2-1. *Expliquer pourqoi h est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.*
   2-2. *Calculer $\int_{\Gamma_R} h(z)dz$ pour $R > 1$ et pour $R < 1$.*

Exercice 0.4 *(6.5 pts). Soit $a \in]0;+\infty[$, On considère la fonction f Définie par $f(t) = e^{-a|t|}$.*

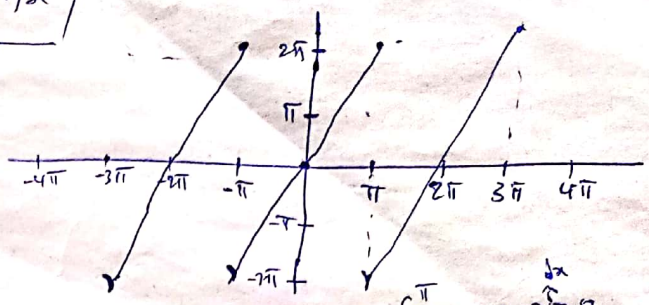
1. *Vérifier que f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.*
2. *déterminer la Transformée de Fourier de la fonction f.*
3. *En utilisant la méthode des résidus, montrer que* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iat}}{(1+t^2)^2}dt = \frac{\pi}{2}(a+1)e^{-a}$.
   (Considérer le circuit Γ_R définie dans l'exercice 3 avec $R > 1$.)
4. *Montrer que si f est paire alors, sa transformée de Fourier, $\hat{f}$ est aussi paire.*
5. *En déduire la transformée de Fourier de la fonction définie par* $h(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$

Bon courage

Scanned with CamScanner

Epreuve d'analyse

Ex 1 : $\begin{cases} g(x) = 2x \text{ sur }]-\pi, \pi] = D \\ g \text{ est } 2\pi\text{-périodique.} \end{cases}$



1) – Les coefficients de Fourier de f : $n \in \mathbb{N}$.

on a f est impaire donc $\begin{cases} a_n = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$ car $g(x)\cos(nx)$ est impaire et donc : $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx = 0$

$\begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = 0 \end{cases}$

et $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,dx$

par intégration par parties on pose : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin(nx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{-\cos(nx)}{n} \end{cases} / n \in \mathbb{N}^*$

donc $b_n = \frac{4}{\pi}\left(\left[\frac{-x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos(n\pi)}{n} + 0\right)$ car $\sin(n\pi) = \sin(0) = 0$

$= \frac{4\times(-1)^{n+1}}{\pi} = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi}$

donc $\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \frac{(-1)^{n+1}\cdot 4}{\pi} \\ a_0 = 0 \end{cases}$

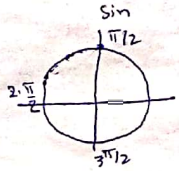
2) – on a : g est 2π-périodique

$\begin{cases} \text{localement intégrable} \Rightarrow \text{continue par morceaux} \\ \text{dérivable par morceaux} \end{cases}$

D'après le Théorème de dirichlet on a : $\forall x \in D$ SF(g) CV vers $g(x)$.

(i.e) : $g(x) = 2x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(nx) \quad \forall x \in D$

donc $2x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) = \frac{x}{2}}$



3) on a : $g(\pi/2) = 2\frac{\pi}{2} = \pi$.

donc $\pi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\frac{\pi}{2})$.

or $\sin(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} (-1)^p & n = 2p+1 \text{ impaire} \\ 0 & n = 2p \text{ paire} \end{cases}$

c.ad : $\frac{\pi}{4} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2p+1}}{2p}\sin(2p\cdot\frac{\pi}{2}) + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2p+2}}{2p+1}\sin((2p+1)\frac{\pi}{2}) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{p\pi}{2}+\frac{\pi}{2})}{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{p\pi}{2})\cdot\cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{p\pi}{2})}{2p+1}$

Car $\sin(p\pi) = 0 / p \in \mathbb{N}$

donc $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

et d'après l'égalité de Parseval on a : $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |g(x)|^2\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{4(-1)^{n+1}}{n}\right|^2 = 16\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 4x^2 = \frac{8}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{8}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{8\pi^2}{3} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

Scanned with CamScanner

Ex 2° $f(x) = e^{\alpha t} H(t)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

1) - Par définition on a : $\mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t - pt}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha - p)t}\, dt$ | avec $\mathrm{Re}(p) > \alpha$

donc $\mathcal{L}(f(t))(p) = \frac{1}{\alpha - p} \left[e^{(\alpha-p)t} \right]_0^R$ or $\mathrm{Re}(p) > \alpha$ donc $e^{(\alpha-p)R} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$

d'où $\mathcal{L}(f(t))(p) = \frac{1}{\alpha - p}(0 - e^0) = \frac{-1}{\alpha - p} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(f(t))(p) = \frac{1}{p - \alpha}}$

2) - on a : $(\forall t \geq 0)$ $\int_0^t e^{t-x} f(x)\, dx = \sin(t)$ on pose $\begin{cases} g(t-x) = e^{t-x} \\ f(x) \end{cases}$ et soit : $\begin{cases} F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p) \\ G(p) = \mathcal{L}(g(t))(p) \end{cases}$

donc $\mathcal{L}^{-1}(F(p) \cdot G(p)) = \int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx = f * g\,(t)$ (produit de convolution).

d'où $F(p) \cdot G(p) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx \right) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{1+p^2}$ / or $G(p) = \mathcal{L}(e^t)(p) = \frac{1}{p-1}$

donc $\frac{F(p)}{p-1} = \frac{1}{1+p^2} \Rightarrow F(p) = \frac{p-1}{1+p^2} = \frac{p}{1+p^2} - \frac{1}{1+p^2}$

d'où $\mathcal{L}^{-1}(F(p))(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{1+p^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+p^2}\right) = \cos(t) - \sin(t) \Rightarrow \boxed{f(t) = \cos(t) - \sin(t)}$

3) on a (E) : $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = e^{-2t} H(t)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

① on a : $\frac{p^2+7p+11}{(p+1)(p+2)(p+4)} = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+2} + \frac{c}{p+4} = f(p)$

- $(p+1) f(p) = \frac{p^2+7p+11}{(p+2)(p+4)} = a + \frac{(p+1)b}{(p+2)} + \frac{(p+1)c}{(p+4)}$ et pour $p = -1$ on a : $\frac{1 - 7 + 11}{3} = a = \frac{5}{3}$
- $(p+2) f(p) = \frac{p^2+7p+11}{(p+1)(p+4)} = \frac{(p+2)a}{(p+1)} + b + \frac{(p+2)c}{(p+4)}$ et pour $p = -2$ on a : $\frac{4 - 14 + 11}{-2} = b = \frac{-1}{2}$
- $(p+4) f(p) = \frac{p^2+7p+11}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+4)a}{(p+1)} + \frac{b(p+4)}{(p+2)} + c$ et pour $p = -4$ on a : $\frac{16 - 28 + 11}{6} = \frac{27 - 28}{6} = c = \frac{-1}{6}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 5/3 \\ b = -1/2 \\ c = -1/6 \end{cases}$

② d'après la transformée de Laplace on a : $\mathcal{L}(y''(t) + 5y'(t) + 4y(t)) = \mathcal{L}(e^{-2t} H(t))(p) = \frac{1}{p+2}$

et la linéarité et la formule de T.L on a : $\mathcal{L}(y''(t)) + 5\mathcal{L}(y'(t)) + 4\mathcal{L}(y(t)) = \frac{1}{p+2}$

car : $p^2 \mathcal{L}(y(t))(p) - p\, y(0) - y'(0) + 5p\, \mathcal{L}(y(t))(p) - 5y(0) + 4\mathcal{L}(y(t))(p) = \frac{1}{p+2}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(y(t))(p)\,(p^2 + 5p + 4) = (p+5) + \frac{1}{p+2} = \frac{5p + 10 + p^2 + 2p + 1}{(p+2)} \Rightarrow \mathcal{L}(y(t))(p) = \frac{5p + 10 + p^2 + 2p + 1}{(p+2)(p^2 + 5p + 4)}$

d'où $\mathcal{L}(y(t))(p) = \frac{p^2+7p+11}{(p+1)(p+2)(p+4)} = \frac{5/3}{p+1} + \frac{-1/2}{p+2} + \frac{-1/6}{p+4}$ / ① 3.1

donc $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5/3}{p+1} - \frac{1/2}{p+2} - \frac{1/6}{p+4} \right) = \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right) - \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+4}\right)$

$= \frac{5}{3} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{1}{6} e^{-4t}$

donc $\boxed{y(t) = \frac{5}{3} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{1}{6} e^{-4t}}$

Scanned with CamScanner

Ex3: $g(z) = e^{iz}$ une fonction de variable complexe. $z = x+iy, (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

① 1-1 - $g(x+iy) = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = \frac{e^{ix}}{e^y} = \frac{1}{e^y}(\cos(x) + i\sin(x)) = \frac{\cos(x)}{e^y} + i\frac{\sin(x)}{e^y} = P(x,y) + iQ(x,y)$

donc $g(x+iy) = \frac{\cos(x)}{e^y} + i\frac{\sin(x)}{e^y} = P(x,y) + iQ(x,y)$ avec $\begin{cases} P(x,y) = \cos(x)/e^y \\ Q(x,y) = \sin(x)/e^y \end{cases}$ deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

1-2 - on a $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont de classe C^1 ⇒ donc les dérivées partielles existent et continues.

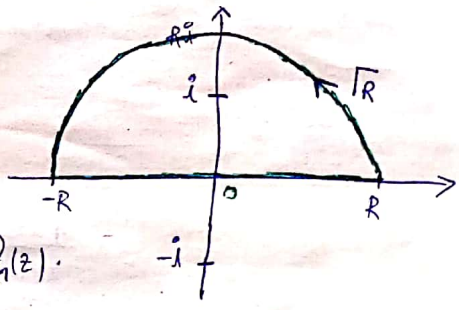
d'où pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: on a: $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = -\frac{\sin(x)}{e^y} \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\cos(x)e^y}{e^{2y}} = -\frac{\cos(x)}{e^y} \end{cases}$ et $\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\cos(x)}{e^y} \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{-\sin(x)\cdot e^y}{e^{2y}} = \frac{-\sin(x)}{e^y} \end{cases}$

donc $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases}$ ce qui prouve que les conditions de Cauchy Riemann sont vérifiées.

D'où $g(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. et on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$g'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{-\sin(x)}{e^y} + i\frac{\cos(x)}{e^y} = i\left(\frac{\cos(x)}{e^y} + i\frac{\sin(x)}{e^y}\right) = i\left(\frac{e^{ix}}{e^y}\right) = i\,e^{ix-y} = i\,e^{iz}$

② on f la fonction définie par $h(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$.



① on e^z est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

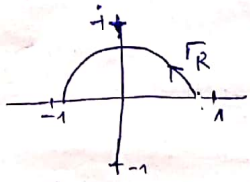
et $h(z) = \frac{e^z}{(z-i)(z+i)}$ donc i et $-i$ sont des pôles simples de $h(z)$.

d'où $h(z)$ est pas définie en i et $-i$. a fortiori n'est pas holomorphe en i et $-i$.

d'où $h(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$.

② • pour $R > 1$: on $i \in \Gamma_R$ donc $\int_{\Gamma_R} h(z)\,dz = 2\pi i\, Res(h, i) = 2\pi i \lim_{z \to i} \frac{(z-i)e^z}{(z-i)(z+i)} = \frac{2\pi i\, e^i}{2i}$

donc $\int_{\Gamma_R} h(z)\,dz = \pi e^i$



• pour $R < 1$:

on remarque que $i, -i \notin \Gamma_R$

or Γ_R est un chemin fermé. et $h(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ en particulier sur Γ_R

d'où d'après Cauchy $\int_{\Gamma_R} h(z)\,dz = 0$

Scanned with CamScanner

Ex 4° Soit $\alpha \in]0,+\infty[$ et on considère $f(t) = e^{-\alpha|t|}$

(1) on a f est f est continue sur $\mathbb{R}$. donc f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

or f est paire : car $f(-t) = e^{-\alpha|-t|} = e^{-\alpha|t|}$.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = 2\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-\alpha t}\,dt = 2\lim_{R\to+\infty}\left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^R$

$= \frac{2}{\alpha} < \infty \quad \left(e^{-\alpha R} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0\right) \Rightarrow f$ est absolument intégrable. càd $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(2) on a $f \in L^1(\mathbb{R})$ donc $\hat{f}(w)$ existe.

d'où : $\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i w t}\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2\pi w t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos(2\pi w t)\,dt = 2I$

par intégration par parties on pose : $\begin{cases} u(t) = e^{-\alpha t} \\ v'(t) = \cos(2\pi w t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = -\alpha e^{-\alpha t} \\ v(t) = \frac{\sin(2\pi w t)}{2\pi w} \end{cases}$

donc $I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos(2\pi w t)\,dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}\sin(2\pi w t)}{2\pi w}\right]_0^R + \frac{\alpha}{2\pi w}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\sin(2\pi w t)\,dt$ ($R\to+\infty$)

$\left| \begin{array}{l} v'(t) = \sin(2\pi w t) : v(t) = \frac{-\cos(2\pi w t)}{2\pi w} \\ u(t) = e^{-\alpha t} : u'(t) = -\alpha e^{-\alpha t} \end{array} \right.$

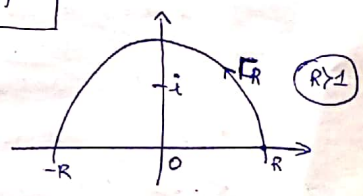
$= \frac{\alpha}{2\pi w}\left(\left[-\frac{e^{-\alpha t}\cos(2\pi w t)}{2\pi w}\right]_0^R - \frac{\alpha}{2\pi w}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos(2\pi w t)\,dt\right) = \frac{\alpha}{2\pi w}\left(\frac{1}{2\pi w} - \frac{\alpha}{2\pi w} I\right)$ ($R\to+\infty$)

donc $I = \frac{\alpha}{(2\pi w)^2} - \frac{\alpha^2}{(2\pi w)^2} I \Rightarrow I\left(1+\frac{\alpha^2}{(2\pi w)^2}\right) = \frac{\alpha}{(2\pi w)^2} \Rightarrow I\left(\frac{\alpha^2+(2\pi w)^2}{(2\pi w)^2}\right) = \frac{\alpha}{(2\pi w)^2}$

$\Rightarrow I = \frac{(2\pi w)^2 \alpha}{(2\pi w)^2(\alpha^2+(2\pi w)^2)} = \frac{\alpha}{\alpha^2+(2\pi w)^2} \Rightarrow \boxed{\hat{f}(w) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+(2\pi w)^2}}$

3) - on considère Γ_R le circuit composé par :

soit $f(t) = \frac{e^{i\alpha t}}{(1+t^2)^2}$ et $g(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$ $\begin{cases} C_+^R : \text{demi-cercle de rayon } R>1. \\ [-R,R] \end{cases}$



on pose : $\begin{cases} P(x) = 1 \\ Q(x) = (1+t^2)^2 \\ Q(x) \text{ n'admet pas de racines simples.} \\ \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ est irréductible.} \end{cases}$

et $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ CV

soit $h(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{((z+i)(z-i))^2}$ donc i et $-i$ sont deux pôles doubles de $h(z)$.

et $\begin{cases} h(z) \text{ est continue sur } U_R = \{z/|z|>R \text{ et } \arg(z)<\pi\} \\ |zh(z)| = \frac{z}{(1+z^2)^2} \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ D'après Jordan $\int_{C_R^+} h(z)\,dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

et d'après le Th des résidu : $\int_{\Gamma_R} h(z)\,dz = \int_{C_2^+} h(z)\,dz + \int_{-R}^{R} h(t)\,dt = 2\pi i\, \text{Res}(h,i)$

et par $R\to+\infty$ $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = 2\pi i \cdot \text{Res}(f,i)$

avec $\text{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}\frac{((z-i)^2 f(z))'}{(2-1)!} = \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{i\alpha z}}{(i+z)^2}\right)' = \lim_{z\to i}\frac{\alpha i\, e^{i\alpha z}(i+z)^2 - e^{i\alpha z}\,2(i+z)}{(i+z)^4}$

$= \alpha i\,\frac{e^{i\alpha z}(i+z) - 2e^{i\alpha z}}{(i+z)^3} = \alpha i\, e^{-\alpha}\,\frac{-\alpha - 2}{-8i} = \frac{(\alpha+1)e^{-\alpha}}{4}$

donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{2\pi i}{4i}(\alpha+1)e^{-\alpha} = \frac{\pi}{2}(\alpha+1)e^{-\alpha}}$

Scanned with CamScanner

4) - pour une fonction $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ on a: $\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi wt}\, dt$

Si f est paire on a :

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\cos(-2\pi wt) + i \sin(-2\pi wt) \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi wt)\, dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(2\pi wt)\, dt \quad \Big/ \begin{cases} f(t)\cos(2\pi wt) \text{ est paire} \\ f(t)\sin(2\pi wt) \text{ est impaire} \end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi wt)\, dt = 2 \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi wt)\, dt$$

Scanned with CamScanner

Donc si $f(t)$ est paire alors $2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2\pi w t)\,dt = \hat{f}(w)$

est aussi paire ☒

(5) soit $h(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$ · on a $h(t)$ est paire

donc $\hat{h}(w)$ est paire aussi

et on a d'après (Q3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iwt}}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{\pi}{2}(\alpha+1)e^{-\alpha}$ pour $\alpha > 0$

donc $\frac{\pi}{2}(\alpha+1)e^{-\alpha} = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iwt}}{(1+t^2)^2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{(1+t^2)^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{(1+t^2)^2}$

d'autre part on a: $\hat{h}(w) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\pi w t)}{(1+t^2)^2}\,dt$ avec $w \in \mathbb{R}$.

- Si $w \geq 0$ alors $2\pi w > 0$: pour $\alpha = 2\pi w$ on a: $\hat{h}(w) = \frac{\pi}{2}(2\pi w + 1)e^{-2\pi w}$
- Si $w < 0 \Rightarrow -2\pi w > 0$: pour $\alpha = -2\pi w$ on a: $\hat{h}(w) = \frac{\pi}{2}(-2\pi w + 1)e^{2\pi w}$

donc $\forall w \in \mathbb{R}$: $\hat{h}(w) = \frac{\pi}{2}(2\pi|w|+1)e^{2\pi|w|}$

Scanned with CamScanner